MÉCANIQUE ET ANALYSE DIMENSIONNELLE

I. Déviation de la lumière par le Soleil

1. **a)** La loi de l'attraction gravitationnelle entre deux points matériels M_1 (m_1) et M_2 (m_2) s'écrit sous forme scalaire :

$$F = \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{M_1 M_2^2} \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{G}] = \frac{[F].L^2}{M^2} = \frac{M.L.T^{-2}.L^2}{M^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{[\mathcal{G}] = M^{-1}.L^3.T^{-2}}.$$

b) Un angle est sans dimension donc le modèle choisi doit vérifier

$$[\theta] = [\mathcal{G}]^\alpha.[M_S]^\beta.[R_S]^\gamma.[c]^\delta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = M^{-\alpha+\beta}.L^{3\alpha+\gamma+\delta}.T^{-2\alpha-\delta} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\alpha+\beta & = & 0 \\ 3\alpha+\gamma+\delta & = & 0 \\ -2\alpha-\delta & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\alpha = \beta = -\gamma \quad \text{et} \quad \delta = -2\alpha}.$$

Il manque une équation pour pouvoir déterminer les 4 coefficients. Il faut donc ajouter des conditions. Tout d'abord il est nécessaire que $\alpha = \beta$ soit **positif** car plus l'interaction gravitationnelle est intense plus la déviation doit être importante.
D'autre part le choix de la simplicité impose de prendre $\boxed{\alpha = \beta = 1}$. Il en découle $\boxed{\gamma = -1}$ et $\boxed{\delta = -2}$, et donc

$$\boxed{\theta = K\,\frac{\mathcal{G} M_S}{c^2 R_S}}.$$

2. On obtient alors $\underline{\theta = 8 \times 10^{-6}\,\text{rad} = 1,7''}$.
Remarque : on répond ici en valeur absolue, car le signe de θ n'est pas évident sur le schéma puisque le vecteur $\vec{u}_z$ n'est pas représenté.

3. **a)** En notant r la distance entre les deux particules, les forces électrostatique et gravitationnelle s'écrivent respectivement (en valeur algébrique selon un vecteur unitaire bien choisi) :

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{et} \quad -\frac{\mathcal{G} m M}{r^2}.$$

Les deux interactions ont donc la même forme mathématique à condition de remplacer $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-\mathcal{G}mM$. Donc en exploitant l'expression de la déviation Rutherford (cas répulsif avec $qQ > 0$) on obtient la déviation gravitationnelle ψ qui vérifie

$$\boxed{\tan\frac{\psi}{2} = -\frac{\mathcal{G} m M}{2b\mathcal{E}_{k0}}}.$$

Celle-ci n'a donc pas le même signe puisque la force est maintenant **attractive**.

b) En notant que $\mathcal{E}_{k0} = \frac{1}{2}mc^2$ pour les « particules de lumière » et $M = M_S$, les masses m se simplifient et on obtient

$$\tan\frac{\psi}{2} = -\frac{\mathcal{G} M_S}{c^2 b}.$$

Cette déviation sera ici suffisamment petite pour que l'on puisse approximer $\tan\frac{\psi}{2} \approx \frac{\psi}{2}$. De plus, en valeur absolue on voit que la déviation sera maximale si b est minimal, donc si $b \approx R_S$ (car la déviation est infime). Ceci donne finalement

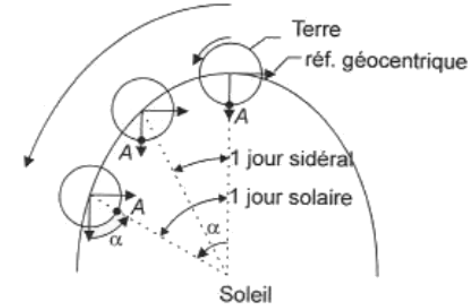
$$\boxed{\theta_N = |\psi|_{\max} \approx 2\,\frac{\mathcal{G} M_S}{c^2 R_S}},$$

ce qui est bien **la moitié du résultat obtenu par la relativité générale**.

II. Jour sidéral et lunaison

1.

On illustre ci-contre le mouvement de la Terre autour du Soleil dans le **référentiel héliocentrique**, avec les positions correspondant au jour solaire et au jour sidéral.



Le jour solaire serait de durée constante au cours de l'année si la trajectoire était parfaitement circulaire [1]. En fait elle est légèrement elliptique, d'où des variations de vitesse de translation autour du Soleil : la Terre se déplace plus rapidement lorsqu'elle est proche du Soleil que lorsqu'elle en est éloignée [2]. De ce fait, l'angle de rotation propre à réaliser pour retrouver le Soleil « au Zenith »est variable selon le moment de l'année : **le jour solaire sera plus long en hiver qu'en été car la Terre est plus proche du Soleil en hiver qu'en été**.

2. Deux méthodes de résolution sont possibles.

- *Première Méthode : on suit l'indication de l'énoncé qui invite à raisonner sur le nombre de jours dans une année.*
  Le schéma ci-dessus montre qu'à chaque fin de jour sidéral il reste encore une certaine durée à attendre pour terminer le jour solaire en cours. Ce retard s'accroît de jour en jour, si bien qu'au bout d'une année complète, la Terre a fait une rotation propre de plus que le nombre de jours solaires :

$$\boxed{N_{\text{sid}} = N_{\text{sol}} + 1} = \underline{366,256}.$$

  On en déduit la durée du jour sidéral en divisant celle d'une année par N_{sid} :

$$\boxed{T_{\text{sid}} = \frac{N_{\text{sol}}}{N_{\text{sid}}}\,T_{\text{sol}}} = \underline{86164\,\text{s}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\omega_T = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}}} = \underline{7,3 \times 10^{-5}\,\text{rad.s}^{-1}}.$$

- *Seconde Méthode : en utilisant les vitesses angulaires.*
  On note T_a la durée d'une année, et $\omega = \frac{2\pi}{T_a}$ la vitesse angulaire du centre de la Terre autour du Soleil. L'angle α représenté ci-dessus correspond à la fois à l'écoulement d'un jour solaire autour du Soleil, et à l'écart angulaire entre un jour solaire et un jour sidéral dans la rotation propre. On peut donc l'écrire de deux façons :

$$\alpha = \omega T_{\text{sol}} = \omega_T (T_{\text{sol}} - T_{\text{sid}}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{T_a} T_{\text{sol}} = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}}(T_{\text{sol}} - T_{\text{sid}}) \quad \Leftrightarrow \quad T_{\text{sid}} = \frac{T_a}{T_a + T_{\text{sol}}}\,T_{\text{sol}}$$

$$\text{d'où} \quad T_{\text{sid}} = \frac{T_a/T_{\text{sol}}}{T_a/T_{\text{sol}} + 1}\,T_{\text{sol}} = \frac{N_{\text{sol}}}{N_{\text{sol}} + 1}\,T_{\text{sol}}.$$

  On retrouve donc le même résultat.

3. Chaque lunaison nécessite à la Lune de faire un peu plus qu'un tour autour de la Terre, à cause du déplacement de la Terre. Il s'agit d'un calcul analogue au précédent, où T_{lun} correspond au jour solaire et T_0 au jour sidéral (cf schéma ci-dessous).

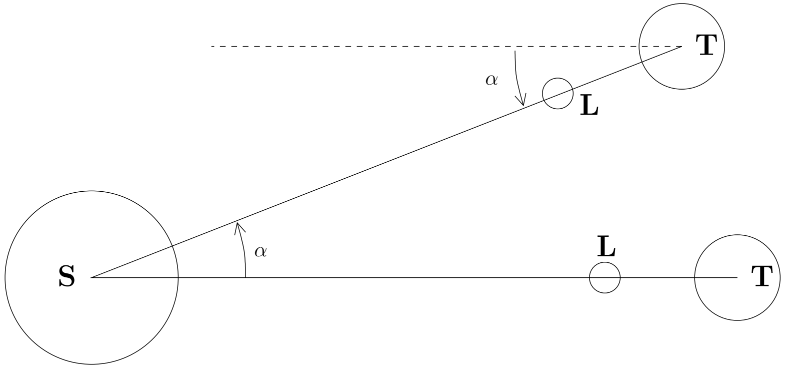
1. On fait ici abstraction des variations de vitesse angulaire de rotation propre de la Terre, dont la rotation propre n'est pas parfaitement uniforme.
2. Il s'agit d'une conséquence de la conservation de l'énergie mécanique, cf chapitre sur les forces centrales newtoniennes.

- *Première Méthode :*
  Au bout d'une année, la Lune a effectué un tour de plus que le nombre de lunaisons, donc

$$\frac{T_a}{T_0} = \frac{T_a}{T_{\text{lun}}} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T_{\text{lun}} = \frac{T_a}{\frac{T_a}{T_0} - 1} = \frac{T_a}{T_a - T_0}\, T_0} = \underline{29,531\,\text{j}}\,.$$

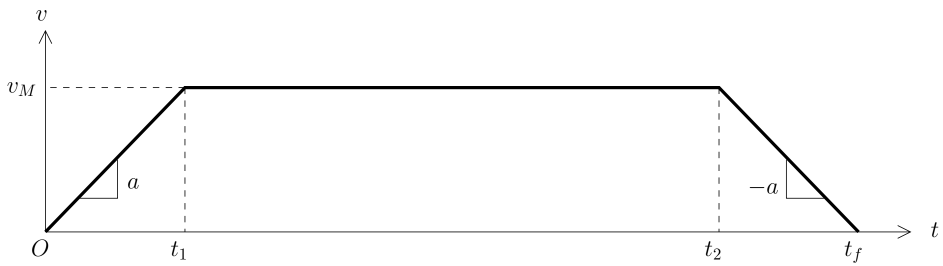
- *Seconde Méthode :*
  Notons ω_0 la vitesse angulaire de la Lune autour de la Terre. L'angle α correspondant au mouvement de la Terre autour du Soleil pendant une lunaison est aussi l'écart angulaire entre une lunaison et un tour complet de la Lune. On peut donc l'écrire de deux façons :

$$\alpha = \omega T_{\text{lun}} = \omega_0 (T_{\text{lun}} - T_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{T_a} T_{\text{lun}} = \frac{2\pi}{T_0}(T_{\text{lun}} - T_0) \quad \Leftrightarrow \quad T_{\text{lun}} = \frac{T_a}{T_a - T_0}\, T_0\,.$$



III. Vitesse maximale d'un véhicule

On suppose un mouvement rectiligne selon l'axe Ox. D'après l'énoncé, le graphe de la vitesse $v = \dot{x}$ au cours du temps a l'allure ci-dessous. On suppose que le véhicule commence et termine à l'arrêt, ce qui est implicite dans l'énoncé mais nécessaire pour résoudre le problème sans données supplémentaires.



On voit sur ce graphe qu'en plus de la vitesse maximale v_M, on a introduit trois autres inconnues : t_1, t_2 et t_f (durée du trajet). Or le fait que l'accélération soit la même au début qu'à la fin (en valeur absolue) impose

$$t_f - t_2 = t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_f = t_2 + t_1\,. \tag{1}$$

Il reste donc 3 équations à écrire, qui sont données par l'énoncé.

- La vitesse maximale est reliée à la durée d'accélération par

$$v_M = a\, t_1\,. \tag{2}$$

- la distance totale parcourue est par définition l'aire totale sous la courbe :

$$d = x(t_f) - x(0) = \int_0^{t_f} v(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} v_M t_1 + v_M(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} v_M (t_f - t_2) = v_M t_1 + v_M (t_2 - t_1)$$

en utilisant l'Eq. (1) pour simplifier, d'où

$$d = v_M t_2\,. \tag{3}$$

- La vitesse moyenne est par définition $v_m = \frac{d}{t_f}$ avec $t_f = t_2 + t_1$, d'où :

$$v_m = \frac{d}{t_1 + t_2} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 + t_2 = \frac{d}{v_m}\,. \tag{4}$$

On connaît donc la somme des inconnues t_1 et t_2, on peut obtenir leur produit en réunissant les Eqs.(2)-(3) :

$$t_1 t_2 = \frac{d}{a}\,.$$

On en déduit que t_1 et t_2 sont racines du trinôme ci-dessous :

$$t^2 - \frac{d}{v_m} t + \frac{d}{a} = 0 \quad \text{pour} \quad t = t_{1,2}\,.$$

Le discriminent s'écrit : $\Delta = \frac{d^2}{v_m^2} - 4\frac{d}{a}$. On en déduit, puisque $t_1 < t_2$, que

$$t_1 = \frac{d}{2v_m} - \frac{d}{2v_m}\sqrt{1 - \frac{4v_m^2}{ad}} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{d}{2v_m} + \frac{d}{2v_m}\sqrt{1 - \frac{4v_m^2}{ad}}\,.$$

D'après l'Eq.(2) on peut conclure que

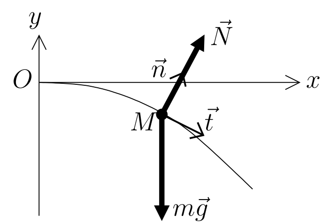
$$\boxed{v_M = \frac{ad}{2v_m}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4v_m^2}{ad}}\right)} = \underline{25\,\text{m.s}^{-1}} = \underline{90\,\text{km.h}^{-1}}\,.$$

IV. Mouvement d'un bolide

1. Le système { bolide } de centre de masse M et de masse m subit les forces extérieures suivantes : son poids $m\vec{g}$ et la réaction normale $\vec{N}$ du support (cf schéma ci-contre).
Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R} = (0, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) s'écrit

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{N}$$

à savoir que le mouvement du centre de masse M ne dépend que des forces extérieures.



2. En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y \quad \text{or} \quad y = -ax^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -2ax\dot{x} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x - 2ax\dot{x}\vec{u}_y}\,.$$

En re-dérivant on obtient l'accélération

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x - 2a(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\vec{u}_y}\,.$$

3. On suppose le mouvement dans le sens des x croissant. Par définition de la vitesse, on a

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \quad \text{avec} \quad ||\vec{v}|| = \dot{x}\sqrt{1+4a^2x^2} \quad \text{car} \quad \dot{x} > 0\,, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\,(\vec{u}_x - 2ax\vec{u}_y)}\,.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est obtenu en permutant les composantes et en changeant un signe de sorte que ses deux composantes soient positives (cf schéma) :

$$\boxed{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\,(2ax\vec{u}_x + \vec{u}_y)}\,.$$

4. On a $\vec{N} = N\vec{n}$, donc on projette le TRC selon $\vec{n}$ en exploitant les expressions de $\vec{a}$, de $\vec{n}$ et $\vec{g} = -g\vec{u}_y$:

$$m\vec{a}.\vec{n} = m\vec{g}.\vec{n} + N \quad \Leftrightarrow \quad N = m\left(\ddot{x}\vec{u}_x - (2a\dot{x}^2 + 2ax\ddot{x} - g)\vec{u}_y\right).(2ax\vec{u}_x + \vec{u}_y).\frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}} \quad \text{d'où}$$

$$N = m\,\frac{2ax\ddot{x} - 2a(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + g}{\sqrt{1+4a^2x^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{N = m\,\frac{-2a\dot{x}^2 + g}{\sqrt{1+4a^2x^2}}}\,.$$

5. Comme $v^2 = \dot{x}^2(1+4a^2x^2)$ on en déduit

$$\boxed{\dot{x} = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2gax^2}{1+4a^2x^2}}}\,.$$

6. Les deux précédents résultats conduisent à

$$\boxed{N = \frac{m}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\left(-2a\,\frac{v_0^2 + 2gax^2}{1+4a^2x^2} + g\right)}\,.$$

Le bolide décolle de la piste si à une certaune position x on a

$$N(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2a\,\frac{v_0^2 + 2gax^2}{1+4a^2x^2} + g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a\,(v_0^2 + 2gax^2) = g(1+4a^2x^2) \quad \Leftrightarrow \quad g = 2av_0^2\,.$$

Cette condition ne dépend pas de x, ce qu'il y a soit toujours contact soit jamais. En effet on peut renverser le raisonnement : le bolide ne décollera pas si

$$\forall x, N(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2av_0^2 < g \quad \Leftrightarrow \quad v_0 < \sqrt{\frac{g}{2a}}\,.$$

Inversement, si $v_0 < \sqrt{\frac{g}{2a}}$ on aura $N(x) \leq 0$, $\forall x$ ce qui contredit l'hypothèse du contact avec le support.

En conclusion, le bolide ne décollera jamais si $\boxed{v_0 < \sqrt{\frac{g}{2a}}}$ **et décollera immédiatement si** $\boxed{v_0 \geq \sqrt{\frac{g}{2a}}}$**.**

Remarque : a posteriori on remarque que l'on aurait pu intuiter ce résultat en raisonnant sur la chute libre (donc avec $\vec{N} = \vec{0}$ car sans support). La trajectoire aurait aussi été une parabole $y = -ax^2$, mais avec un coefficient a' différent de a. En faisant le calcul on trouve $a' = \frac{g}{2v_0^2}$. Si $a' > a$, le support parabolique va retenir la chute du bolide car il descend moins vite que la trajectoire libre. Il y aura donc vraisemblablement toujours contact. Dans le cas contraire, le support descend plus vite que la trajectoire libre donc le bolide décolle immédiatement.
Mais attention ce raisonnement n'est pas complètement rigoureux, et surtout il ne marche pas avec une autre forme de support.

7. La présence de la force de frottement $\vec{T} = -T\vec{t}$ donnera, pour toute position x, une vitesse $\dot{x}$ inférieure à celle calculée précédemment (freinage). Or d'après l'expression

$$N = m\,\frac{-2a\dot{x}^2 + g}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$$

qui est toujours valable en présence de $\vec{T}$, la réaction N croît quand $\dot{x}^2$ diminue, donc la réaction sera supérieure à celle calculée précédemment. Par conséquent il n'y aura toujours pas de décollement si $\boxed{v_0 < \sqrt{\frac{g}{2a}}}$. Mais dans le cas où $\boxed{v_0 \geq \sqrt{\frac{g}{2a}}}$, on ne peut conclure sans calcul.

Si l'on essaie de faire le calcul, il faut ajouter une force de réaction tangentielle $\vec{T} = -T\vec{t}$ avec $T = ||\vec{T}|| > 0$, qui vérifiera la loi de Coulomb en glissement : $T = fN$. On aura alors $v^2 \neq v_0^2 + 2gax^2$ et on obtiendra une équation différentielle non-linéaire que l'on ne peut résoudre que numériquement...